

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений



Каменский М.И.
20.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.09 Полугруппы линейных ограниченных операторов

1. Шифр и наименование направления подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки
2. Профиль подготовки: программа «Математическое и компьютерное моделирование»
3. Квалификация (степень) выпускника: Магистр
4. Форма обучения: очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: функционального анализа и операторных уравнений
6. Составители программы: Леженина Ирина Федоровна к.ф.-м.н.
7. Рекомендована: НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 18.03.2025 г.
8. Учебный год: 2026-2027 Семестр: четвертый

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

знакомство студентов с основами теории полугрупп линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве.

Задачи учебной дисциплины:

изучение равномерно непрерывных полугрупп;

сильно непрерывных полугрупп;

аналитических полугрупп и их использование для решения задач математической физики.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к вариативной части блока Б1. Дисциплины (модули).

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|------|---|--------|---|--|
| ПК-1 | Способен проводить научно-исследовательские разработки в области математического моделирования физических и экономических процессов методами функционального анализа, а также реализовывать программно соответствующие математические алгоритмы | ПК-1.1 | Обладает базовыми знаниями, полученными в области математического моделирования | Знать: базовые понятия теории полугрупп Уметь: строго доказывать основные утверждения, сформулированные в курсе Владеть: методами, используемыми в теории полугрупп. |
| | | ПК-1.2 | Умеет использовать соответствующие базовые знания при проведении научно-исследовательских работ | Знать: постановки некоторых классических задач математики Уметь: применять теорию полугрупп линейных ограниченных операторов к исследованию разрешимости задач математической физики Владеть: базовыми методами теории полугрупп при проведении научно-исследовательских работ |
| ПК-2 | Способен проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований в области математического и компьютерного моделирования различных процессов | ПК-2.1 | Владеет навыками анализа научно-технической литературы по тематике проводимых исследований на русском и других языках | Знать: методы анализа научно-технической литературы Уметь: проводить анализ научно-технической литературы по теории полугрупп линейных ограниченных операторов Владеть: навыками анализа научно-технической литературы по теории полугрупп ограниченных операторов |

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 2/72.

Форма промежуточной аттестации зачет.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

| Вид учебной работы | | Трудоемкость | | |
|---------------------------------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| | | Всего | По семестрам | |
| | | | 4 семестр | № семестра |
| Аудиторные занятия | | 40 | 40 | ... |
| в том числе: | лекции | 20 | 20 | |
| | практические | 20 | 20 | |
| | лабораторные | | | |
| Самостоятельная работа | | 32 | 32 | |
| в том числе: курсовая работа (проект) | | | | |
| Форма промежуточной аттестации | | зачет | зачет | |
| Итого: | | 72 | 72 | |

13.1. Содержание дисциплины

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК* |
|--------------------------------|---|---|---|
| 1. Лекции | | | |
| 1.1 | Функции со значением в банаховом пространстве | Непрерывность. Дифференцируемость. Интегрируемость. | |
| 1.2 | Равномерно непрерывные полугруппы | Определение. Примеры. Свойства равномерно непрерывных полугрупп. Теорема о существовании производящего оператора. Свойства производящего оператора. Задача Коши для уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax$. | |
| 1.3 | Сильно непрерывные полугруппы | Определение. Оценка роста полугруппы. Примеры. Определение производящего оператора. Свойства производящего оператора (замкнутость, плотность области определения). Резольвента производящего оператора. Теорема Хилле — Филлипса. Представление сильно непрерывной полугруппы через резольвенту. Дифференцируемость сильно непрерывной полугруппы. Использование теории сильно непрерывных полугрупп для решения задач математической физики. | |
| 1.4 | Аналитические полугруппы | Определение. Примеры. Теорема Соломяка — Иосиды о производящем операторе полугруппы. Использование теории аналитических полугрупп для решения задач математической физики | |
| 2. Практические занятия | | | |
| 2.1 | Функции со значением в банаховом пространстве | Проверка непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости функций со значениями в различных банаховых пространствах | |
| 2.2 | Равномерно непрерывные полугруппы | Примеры равномерных полугрупп. Применение теории полугрупп к исследованию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений | |

| | | | |
|-----|--------------------------------|---|--|
| 2.3 | Сильно непрерывные полу-группы | Проверка выполнения условий теоремы Хилле-Филлипса для некоторых линейных операторов. Применение теории сильно непрерывных полугрупп к исследованию задач математической физики. | |
| 2.4 | Аналитические полугруппы | Примеры аналитических полугрупп. Проверка выполнения условий теоремы Соломяка – Иосиды о производящем операторе аналитической полугруппы. Использование теории аналитических полугрупп для решения задач математической физики. | |

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (часов) | | | | |
|----------|---|----------------------|--------------|-------------------|---------------------------|------------|
| | | Лек- ции | Практические | Лаборатор- ные | Самостоятельная работа | Все- го |
| 1 | Функции со значением в банаховом пространстве | 4 | 4 | | 6 | 14 |
| 2 | Равномерно непрерывные полугруппы | 4 | 4 | | 6 | 14 |
| 3 | Сильно непрерывные полугруппы | 6 | 6 | | 10 | 22 |
| 4 | Аналитические полугруппы | 6 | 6 | | 10 | 22 |
| | Итого | 20 | 20 | | 32 | 72 |

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторные занятия по дисциплине проводятся в виде лекций и практических занятий. На лекциях излагается теоретический материал, на практических занятиях разбираются примеры и решаются задачи по темам дисциплины.

Перед каждой лекцией студентам рекомендуется подробно изучить конспект предыдущей лекции, разобрать примеры.

Перед каждым практическим занятием рекомендуется проанализировать необходимый для занятия теоретический материал, разобрать решенные задачи, решить, заданные задачи, подготовить вопросы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|----------|--|
| 1. | Красносельский, М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с. — М.: Наука. — 1966. — 500с. |
| 2. | Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с. |
| 3. | Иосида, К. Функциональный анализ : [учебник] / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова. — М. : Мир, 1967. — 624 с. |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 1. | Полугруппы линейных ограниченных операторов [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов : [для студ., обуч. по направлению 01.03.04 Прикладная математика] : [для 4 к. очной формы обучения мат. фак.] / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Г.Б. Савченко. Воронеж, 2016. URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m16-22.pdf . |
| 2. | 1. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: https://reader.lanbook.com/book/210290#1 . |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 1.. | https://lib.vsu.ru/ - электронный каталог ЗНБ ВГУ |
| 2. | ЭБС «Лань» https://e.lanbook.com |

16.Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы*(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)*

| № п/п | Источник |
|-------|--|
| 1. | Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете |

17.Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5531>) Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet. Математические пакеты Maxima, Microsoft Word.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория со специализированной мебелью. Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|-------|--|----------------|-------------------------------------|--------------------|
| 1. | Функции со значением в | ПК-1 | ПК-1.1 | Контрольная работа |

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|---|--|----------------|-------------------------------------|--------------------|
| | банаховом пространстве | | | |
| 2. | Равномерно непрерывные полугруппы | ПК-1 | ПК-1.2 | Контрольная работа |
| 3. | Сильно непрерывные полугруппы | ПК-2 | ПК-2.1 | Контрольная работа |
| 4. | Аналитические полугруппы | ПК-2 | ПК-2.1 | Контрольная работа |
| Промежуточная аттестация форма контроля – <u>зачет</u> | | | | Перечень вопросов |

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: опрос, контрольная работа.

Комплект заданий для контрольной работы

Задание 1

Доказать, что полугруппа линейных ограниченных операторов $T(t)$ является сильно непрерывной тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ функция $T(t)x$ непрерывна в нуле.

Задание 2

Привести пример равномерно непрерывной полугруппы.

Задание 3

Пусть X - пространство непрерывных периодических периода 1 функций, действующих из R^1 в R^1 , с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s)|$.

$$T(t)x(s) = x(t + s), \quad (t, s \geq 0).$$

Проверить, что $T(t)$ сильно непрерывная полугруппа, но равномерно непрерывной не является.

Задание 4

Определение аналитической полугруппы. Привести пример аналитической полугруппы.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по вопросам

Вопросы для собеседования

1. Непрерывность.
2. Дифференцируемость.
3. Интегрируемость.
4. Определение равномерно непрерывной полугруппы. Примеры.
5. Свойства равномерно непрерывных полугрупп.
6. Теорема о существовании производящего оператора равномерно непрерывной

полугруппы.

7. Свойства производящего оператора.
8. Задача Коши для уравнения с ограниченным оператором .
9. Определение сильно непрерывной полугруппы.
10. Оценка роста полугруппы. Примеры.
11. Определение производящего оператора сильно непрерывной полугруппы.
12. Свойства производящего оператора (замкнутость, плотность области определения).
13. Резольвента производящего оператора сильно непрерывной полу-группы.
14. Теорема Хилле – Филлипса.
15. Представление сильно непрерывной полугруппы через резольвенту.
16. Дифференцируемость сильно непрерывной полугруппы.
17. Определение аналитической полугруппы. Примеры.
18. Теорема Соломяка – Иосиды о производящем операторе аналитической полугруппы.

Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения)при промежуточной аттестации

Оценка «зачтено» выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программой материал: правильно и аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров; показал глубокие систематизированные знания; владеет приемами рассуждения и сопоставления материала из разных источников; без ошибок выполняет практические задания. Обязательным условием выставления оценки является правильное решение предложенных примеров.

Дополнительным условием получения оценки могут стать хорошие успехи при выполнении контрольной работы, систематическая и активная работа на лекционных и практических занятиях.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, который не справился с предложенными заданиями и в ответах на дополнительные вопросы допустил существенные ошибки.